עבור מתקיים לכל ולכן

נוכיח עבור

ידוע ש. לכן . כלומר

נשים , ואז , כלומר לכן

*f רציפה ב מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי לפי משפטי ויירשטראס. f תקבל את המקסימום ואת המינימום שלה או באחד הקצוות או בנקודה ב בה הנגזרת מתאפסת או בנקודה ב בה f אינה גזירה.*

# הגדרה

*תהי f פונקציה המוגדרת ב. נגיד שלf יש מקסימום מקומי ב אם קיים כך ש ולכל מתקיים ש.*

*אם לכל נגיד שיש מקסימום מקומי אמיתי.*

*באופן דומה מגדירים מינימום מקומי ומינימום מקומי אמיתי.*

*נניח שf רציפה ב וגזירה פעמיים ב. נחפש את הנקודות בהן f מקבלת מקסימום או מינימום מקומי. על פי משפט פרמה בכל נקודה בה יש מקסימום או מינימום מקומי.(ההפך לא נכון – למשל , אבל אין שם מינימום או מקסימום מקומי.)*

*נניח ש. איך נדע אם מקסימום מקומי או מינימום מקומי או לא זה ולא זה? נתבונן בפיתוח טיילור סביב :*

אם החלק תמיד גדול מאפס אז הפוקנציה תמיד גדולה מ בסביבת ולכן זהו מקסימום מקומי אמיתי. אם החלק הזה קטן מאפס אז הפונקציה תמיד קטנה מ בסביבת וזהו מקסימום מקומי אמיתי.

# משפט

1. אם אזי לf יש מינימום מקומי אמיתי ב
2. אם אזי לf יש מקסימום מקומי אמיתי בנקודה .
3. אם הנגזרת השנייה מתאפס הכל יכול להיות

## הוכחה

# משפט

נניח שf גזירה n פעמים ב וש. אזי:

1. אם n זוגי, , ו אזי לf יש מינימום מקומי אמיתי ב. ואם אזי לf יש מקסימום מקומי אמיתי ב. ואם הכל יכול להיות.
2. אם n אי זוגי ו, אינה מקסימום מקומי ואינה מינימום מקומי. אם הכל יכול להיות.

## הוכחה

אמנם

לכן קובע אם הפונקציה תהיה מעל או מתחת ל

# הגדרה

תהי f מוגדרת בסביבת וגזירה ב. נגיד שf קעורה(concave) ב אם בסביבת באשר .

F קמורה(convex או convex up) ב אם לכל x בסביבת (חוץ מ)

# משפט

תהי f פונקציה גזירה פעמיים בנקודה ונניח ש. אם הפונקציה קמורה ב ואילו אם הפונקציה קעורה ב.

## הוכחה

אמנם, כלומר  
אם חיובי אזי האגף הימני יהיה חיובי, יתקיים והפונקציה תהיה קמורה ב. אם שלילי אזי האגף הימני יהיה שלישי, יתקיים והפונקציה תהיה קעורה ב.

במקרה ש: לדוגמה , , , . במקרה הזה זוהי נקודת פיתול, שכן יש מעבר בין מקעירות לקמירות.

# הגדרה

תהיינה סדרה של פונקציות המוגדרות על . נגיד ש מתכנסת(נקודתית) לf(מוגדרת על S) אם לכל מתקיים , וכותבים

## דוגמה

*לכל*

# הגדרה

תהיינה סדרה של פונקציות המוגדרות על . נגיד שהטור מתכנס(נקודתית) לS אם הסדרה מתכנסת לS באשר (אפשר גם לכתוב )